THUPC2022 快速最小公倍数变换

ltst

THU IIIS

2023 年 3 月 2 日

简要题意

给定 n 个数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，选择两个数删掉并将它们的和加入，求所有的方案的最小公倍数的和，对 998244353 取模。
$n \le 5 \times 10^5, 1 \le a_i \le 10^6$

定义

对于正整数 A 和素数 p，定义 $v_p(A)$ 为 A 的唯一质因子分解中 p 的出现次数。因此 $p^{v_p(A)} \mid A$ 而 $p^{v_p(A)+1} \nmid A$。
定义 $M(p)$ 和 $m(p)$ 为 $\{v_p(a_1), \cdots, v_p(a_n)\}$ 中的最大值和非严格次大值，即当最大值出现超过一次时，$m(p) = M(p)$。

定义

对于正整数 A 和素数 p，定义 $v_p(A)$ 为 A 的唯一质因子分解中 p 的出现次数。因此 $p^{v_p(A)} \mid A$ 而 $p^{v_p(A)+1} \nmid A$。
定义 $M(p)$ 和 $m(p)$ 为 $\{v_p(a_1), \cdots, v_p(a_n)\}$ 中的最大值和非严格次大值，即当最大值出现超过一次时，$m(p) = M(p)$。
那么 $\prod_{p \in \texttt{Prime}} p^{M(p)}$ 就是整个序列的最小公倍数。接下来删掉两个数并加上一个数时，可以仅考虑 $M(p)$ 的变化量。

观察

删除 a_i 和 a_j 并加入 $a_i + a_j$ 时，我们期待 $M(p)$ 的变化可以由

- 仅和 a_i 相关的量；
- 仅和 a_j 相关的量；
- 仅和 $a_i + a_j$ 相关的量

这三部分刻画，这样贡献的独立性更方便我们进行卷积操作。

定理

定理 1

对于任意 a_i 和 a_j，设将 a_i 和 a_j 删去并加入 a_i+a_j 后整个序列的最小公倍数中 p 的指数的变化量为 $\Delta M_p(a_i,a_j)$，则

$$\begin{aligned}\Delta M_p(a_i,a_j) =&[M(p)=v_p(a_i)](m(p)-M(p))\\&+[M(p)=v_p(a_j)](m(p)-M(p))\\&+\max(v_p(a_i+a_j)-M(p),0).\end{aligned}$$

定理

定理 1

对于任意 a_i 和 a_j，设将 a_i 和 a_j 删去并加入 $a_i + a_j$ 后整个序列的最小公倍数中 p 的指数的变化量为 $\Delta M_p(a_i, a_j)$，则

$$\begin{aligned}\Delta M_p(a_i, a_j) =& [M(p) = v_p(a_i)](m(p) - M(p)) \\ &+ [M(p) = v_p(a_j)](m(p) - M(p)) \\ &+ \max(v_p(a_i + a_j) - M(p), 0).\end{aligned}$$

也就是说，$\Delta M_p(a_i, a_j)$ 直接由删去 a_i 造成的指数减小、删去 a_j 造成的指数减小和加入 $a_i + a_j$ 造成的指数增大三部分贡献。这三部分贡献的基准都是 $M(p)$，这是非常反直觉的，而在删除超过两个数时类似结论不成立。

证明

$$\begin{aligned}\Delta M_p(a_i,a_j)=&[M(p)=v_p(a_i)](m(p)-M(p))\\&+[M(p)=v_p(a_j)](m(p)-M(p))\\&+\max(v_p(a_i+a_j)-M(p),0).\end{aligned}$$

定义 $f_i=[M(p)=v_p(a_i)], f_j=[M(p)=v_p(a_j)], f_k=[v_p(a_i+a_j)\ge M(p)], f_l=[m(p)=M(p)]$。**分类讨论**:

- $f_i=f_j=0$: **上式显然成立**。

证明

$$\begin{aligned}\Delta M_p(a_i,a_j) =& [M(p)=v_p(a_i)](m(p)-M(p))\\ &+[M(p)=v_p(a_j)](m(p)-M(p))\\ &+\max(v_p(a_i+a_j)-M(p),0).\end{aligned}$$

定义 $f_i=[M(p)=v_p(a_i)], f_j=[M(p)=v_p(a_j)], f_k=[v_p(a_i+a_j)\geq M(p)]$。分类讨论：

- $f_i=1, f_j=0$：此时 $v_p(a_i)=M(p)>v_p(a_j)$，故 $v_p(a_i+a_j)=v_p(a_j)$，$\{v_p(a_i)\}$ 集合只删掉了一个最大值。因此 $f_k=0$ 且 $\Delta M_p(a_i,a_j)=(m(p)-M(p))$，与上式相符。

证明

$$\begin{aligned}\Delta M_p(a_i,a_j) =& [M(p)=v_p(a_i)](m(p)-M(p))\\ &+[M(p)=v_p(a_j)](m(p)-M(p))\\ &+\max(v_p(a_i+a_j)-M(p),0).\end{aligned}$$

定义 $f_i=[M(p)=v_p(a_i)], f_j=[M(p)=v_p(a_j)], f_k=[v_p(a_i+a_j)\geq M(p)], f_l=[m(p)=M(p)]$。**分类讨论**:

- $f_i=f_j=1$: **此时** $m(p)=M(p)$, **且** $v_p(a_i+a_j)\geq M(p)$。**因此** $f_k=1$ **且** $\Delta M_p(a_i,a_j)=v_p(a_i+a_j)-M(p)$, **与上式相符**。

解法

由此，设

$$f(i)=\prod_{p\in\texttt{Prime}}p^{[M(p)=v_p(i)](m(p)-M(p))},$$

$$g(j)=\prod_{p\in\texttt{Prime}}p^{\max(v_p(j)-M(p),0)},$$

则答案为

$$\sum_{1\le i<j\le n}f(a_i)f(a_j)g(a_i+a_j).$$

解法

此时对值域维度卷积的方法较为显然。定义

$$F(x)=\sum_{i=1}^{n} f(a_i)x^{a_i},$$

则有

$$[x^p]F^2(x)=\sum_{1\le i,j\le n} f(a_i)f(a_j)[a_i+a_j=p].$$

计算 $\frac{1}{2}\left(F^2(x)\cdot\sum_{i\ge 0} g(i)x^i\right)$ 并去除 $i=j$ 的多余贡献即可。
使用 $O(\max a_i)-O(\log\max a_i)$ 分解质因数方法，复杂度 $O((n+\max a_i)\log(\max a_i))$。