

THUPC2022 速战速决

Itst

THU IIIS

2023 年 2 月 25 日

简要题意

n 种牌，每种牌各两张，双方初始获得 n 张手牌。双方轮流在栈里面放牌，当栈里有两张相同的牌时，这两张牌及其中间的牌从栈中移动到放牌的人的手牌里。谁没手牌谁就输了。

后手的策略为一个队列，每次一定出队头，获得的手牌放在队尾，初始手牌的出牌顺序给定。先手可以任意出牌，求先手的最小操作次数策略使得先手胜利。

$n \leq 3 \times 10^5$ 。

Bonus: 先手获得的手牌数小于后手？

分析

操作次数的下界显然是 n ，而这要求后手吃不到牌。因此我们先考虑怎样才能让后手永远吃不到牌。

分析

操作次数的下界显然是 n ，而这要求后手吃不到牌。因此我们先考虑怎样才能让后手永远吃不到牌。

重要的观察是，当栈底那张牌的另一张在后手手上，那么 TA 肯定会吃到这张牌，因为你的策略无法撼动这张牌在栈底的地位。

分析

操作次数的下界显然是 n ，而这要求后手吃不到牌。因此我们先考虑怎样才能让后手永远吃不到牌。

重要的观察是，当栈底那张牌的另一张在后手手上，那么 TA 肯定会吃到这张牌，因为你的策略无法撼动这张牌在栈底的地位。类似地，当栈底那张牌的另一张在先手手上，那么场面对先手来说是非常有利的，因为在任意先手的操作时刻，先手都可以选择打出这一张牌将场面清空。为了有效控场，这张王牌必然是越晚用越好。

分析

这样，在初始手牌有对子时，容易得到一个策略：初始放入手上的一个对子中的一张，而每当先手发现后手可以吃到牌的时候就把栈清空，否则放入任意的其他牌。

分析

这样，在初始手牌有对子时，容易得到一个策略：初始放入手上的一个对子中的一张，而每当先手发现后手可以吃到牌的时候就把栈清空，否则放入任意的其他牌。

此时由两个事实可以说明这个策略总是可以让后手吃不到牌：

- 先手清空后，后手放入的落在栈底的牌在原来的栈中，所以也就在先手的手牌里。所以先手可以一直保持对整个栈的控制；
- 先手不想清空时，由于双方初始手牌数相等且后手永远吃不到牌，先手总是能找到不是栈底的牌打出去。

分析

以上策略要求初始手牌中至少有一个对子，没有考虑先手恰好有 n 种不同的牌的情况。

这个情况下，栈底的牌总是会被后手吃，因此最小操作数至少是 $n + 2$ ，而构造到 $n + 2$ 是简单的：设后手队列为 $1, 2, 3, \dots, n$ ，则按照 $n, 1, 2, \dots, n - 1$ 顺序打出手牌，最后对手手上就只有一对 n 。